ВѢСТНИКЪ
МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 20 и 21.

I.

Выраженіе остатка Лагранжевой строки.

А. Попова.

Суммованіе и доказательство Лагранжевой строки, данной въ первый разъ въ Запискахъ Берлинской Академіи Наукъ за 1768 г., понынѣ занимаетъ математиковъ. Формулы Парсеваля и Пуассона, представляютъ собственно сумму Лагранжевой строки, и не отвѣтствуютъ за значеніе остатка, принадлежащаго строкѣ. Тоже должно сказать о формулахъ Коши (Mém. de l'Institut, tome VIII; 1829), за исключеніемъ одной изъ нихъ, представляющей остатокъ въ строкѣ Тейлора. Но въ этой формулѣ, подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла находятся неизвѣстныя количества, слѣдовательно интегрированіе остается неисполненнымъ. Г. Академикъ Чебышевъ, раздѣляя мнѣніе тѣхъ математиковъ, которые полагаютъ, что обыкновенный способъ интегрированія по частямъ недостаточенъ для развитія Лагранжевой строки, употребилъ формулу *искуственнаго* интегрированія по частямъ и пришелъ къ выраженію остатка (Mélanges mathématiques et astronomiques, publiés par l'Académie de St. Pétérsbourg; tome II).

Я съ своей стороны осмѣлюсь утверждать, что интегрированіе по частямъ приводитъ къ выраженію остатка Лагранжевой строки, столь же просто, какъ и строки Маклореневой; стоитъ только произвести вычисленіе по точному смыслу задачи. Пусть $F(z)$ данная функція перемѣнной величины z, которая сама есть функція независимыхъ перемѣнныхъ x и t, удовлетворяющая уравненію

$$z = x + t\varphi(z) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ φ означаетъ какую нибудь данную функцію. Уравненіе (1) допускаетъ вообще многіе корни z, но мы избираемъ тотъ изъ нихъ, который приводится къ $z = x$, для $t = 0$. Если въ уравненіи тожественномъ

$$f(x,t) - f(x,0) = \int_0^t f'_t(x, t-u)\,du$$

развиваемъ посредствомъ интегрированія по частямъ вторую часть, то получимъ Маклореневу строку, поправленную выраженіемъ остатка:

$$f(x,t) = f(x,0) + t f'_t(x,0) + t_c^2 f''(x,0) + \ldots + t_c^n f_t^{(n)}(x,0) + \int_0^t n_c^r . f_t^{(n+1)}(x, t-u)\,du \;, \;. \quad (2)$$

пользуясь означеніемъ, на сей разъ очень удобнымъ $t_c^n f_t^n(x,0) = \dfrac{t^n}{1.2.3\ldots n} \dfrac{d^n . f(x,t)}{dt^n}_{(t=0)}$

Полагаемъ въ первой части уравненія (2) $f(x,t) = F(z)$; по предположенію нашему о корняхъ уравненія (1) будетъ $f(x,0) = F(x)$.

Прочіе же члены уравненія (2) опредѣлятся слѣдующимъ образомъ, какъ показалъ еще Лапласъ.

Дифференцируя уравненіе (1), по каждому изъ перемѣнныхъ x и t, по исключеніи производной $\varphi'(z)$, получимъ

$$\frac{dz}{dt} = \varphi(z) . \frac{dz}{dx} \;; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

что дастъ, для $t = 0$, $\frac{dz}{dx} = 1$, $\frac{dz}{dt} = \varphi(x)$.

Возьмемъ еще какую нибудь функцію $\theta(z)$ и дифференцируемъ по t произведеніе $\theta(z) . \frac{dz}{dx}$; получимъ

$$\frac{d\,\{\theta(z)\,\frac{dz}{dx}\}}{dt} = \theta'(z)\,\frac{dz}{dt}\,\frac{dz}{dx} + \theta(z)\,\frac{d^2z}{dx\,dt}\,.$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$\frac{d^2z}{dx\,dt} = \varphi(z)\,\frac{d^2z}{dx^2} + \varphi'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

слѣдовательно будетъ

$$\frac{d\,\{\theta(z)\,\frac{dz}{dx}\}}{dt} = \{\theta'(z)\,\varphi(z)+\theta(z)\,\varphi'(z)\}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\theta(z)\varphi(z)\,\frac{d^2z}{dx^2}\,,$$

или, что тоже

$$\frac{d\,\{\theta(z)\,\frac{dz}{dx}\}}{dt} = \frac{d\,\{\theta(z)\,\varphi(z)\,\frac{dz}{dx}\}}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Если полагаемъ теперь послѣдовательно въ уравненіи (4)

$$\theta(z) = F'(z)\,\varphi(z)\ ,\ F'(z)\,\varphi(z)^2\ ,\ F'(z)\,\varphi(z)^3 \text{ и пр.},$$

замѣчая что

$$\frac{d\,F(z)}{dt} = F'(z)\,\frac{dz}{dt} = F'(z)\,\varphi(z)\,\frac{dz}{dx}\,;$$

то получимъ

$$\frac{d^2F(z)}{dt^2} = \frac{d\,\{F'(z)\,\varphi(z)^2.\,\frac{dz}{dx}\}}{dx}\,,$$

$$\frac{d^3F(z)}{dt^3} = \frac{d^2\,\{F'(z)\,\varphi(z)^3.\,\frac{dz}{dx}\}}{dx^2}\,,$$

и по наведенію нетрудно заключить, что вообще

$$\frac{d^nF(z)}{dt^n} = \frac{d^{n-1}\{F'(z)\varphi(z)^n.\frac{dz}{dx}\}}{dx^{n-1}}\,.$$

Чтобы перейти къ значенію функцій $\frac{dF(z)}{dt}$, $\frac{d^2F(z)}{dt^2}$ для $t=0$, можно въ предъидущихъ формулахъ непосредственно полагать $z=x$, $\frac{dz}{dx}=1$; потому что члены, зависящіе отъ t, отдѣляются и уничтожаются вмѣстѣ съ этимъ перемѣннымъ.

Такимъ образомъ будетъ

$$f(x\,,0) = F(x)\,,$$

$$f_t^{(n)}(x\,,0) = \frac{d^{n-1}\,\{F'(x).\,\varphi(x)^n\}}{dx^{n-1}}\,,$$

$$f_t^{(n+1)}(x, t-n) = \frac{d^n\,\{F'(y)\,.\,\varphi(y)^{n+1}.\,\frac{dy}{dx}\}}{dx^n}\,,$$

подразумѣвая въ послѣднемъ уравненіи $y=x+(t-u)\,\varphi(y)$.

Затѣмъ уравненіе (2) напишется подъ видомъ:

$$F(z) = F(x) + t\,F'(x)\,\varphi(x) + t_c^2\,\frac{d\,[F'(x)\,\varphi(x)^2]}{dx} + \ldots + t_c^n\,\frac{d^{n-1}\,[F'(x)\,\varphi(x)^n]}{dx^{n-1}} + R_n\,,$$

гдѣ R_n означаетъ для сокращенія интегралъ $\int_0^t \frac{d^n\,\{F'(y)\,.\,\varphi(y)^{n+1}.\,\frac{dy}{dx}\}}{dx^n}\,.\,\frac{u^n\,du}{1.2.3..n}$.

Здѣсь по предположенію нашему x и t суть независимыя перемѣнныя, слѣдовательно послѣднее уравненіе можно еще написать такимъ образомъ:

$$\int dx\,..\int dx\int R_n\,dx = \int_0^t F'(y).\,\varphi(y)^{n+1}.\,\frac{dy}{dx}\,.\,\frac{u^n\,du}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,n}\,.$$

Но при данномъ значеніи t и x, величина y измѣняется вмѣстѣ съ u, слѣдовательно

$$u = \frac{x + t\,\varphi(y) - y}{\varphi(y)}\,,$$

$$\varphi(y)\,du = -\,dy\,\{1 + \frac{x-y}{\varphi(y)}\,\varphi'(y)\}\,,$$

притомъ будетъ при $u=0$, $y=x+t\,\varphi(y)=z$
при $u=t$, $y=x$.

По вставленіи этихъ значеній въ предъидущее уравненіе, замѣчая также что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(u-t)\,\varphi'(y)} = \frac{\varphi(y)}{\varphi(y)+(x-y)\,\varphi'(y)}\,,$$

получимъ

$$\int dx..\int dx\int R_n dx = \frac{1}{1.2.3..n}\int_x^z F'(y).[x+t\,\varphi(y)-y]^n dy \;..(5)$$

Если въ уравненіи (5) полагаемъ $n=1$ и дифференцируемъ по x, то будетъ

$$R_1 = \int_x^z F'(y)\,dy + \frac{dz}{dx}\,.\,F'(z)[x+t\,\varphi(z)-z] - F'(x).t\,\varphi(x),$$

что приводится къ

$$R_1 = F(z) - F(x) - t\,F'(x)\,\varphi(x)\,,$$

какъ и должно быть, чтобы привести къ тожеству уравненіе

$$F(z) = F(x) + t\,F'(x)\,\varphi(x) + R_1\,.$$

Можно подобнымъ образомъ повѣрить уравнніе (5) для $n=2, 3, . .$ и что всего лучше, повѣрить вообще для n. И такъ беремъ уравненіе

$$\int_n dx\,..\int dx\int R dx = \frac{1}{1.2.3..n}\int_x^z F'(y).\,[x+\varphi(y)-y]^n\,dy\,,$$

въ которомъ $F'(y)$ означаетъ производную какой нибудь функціи $F(y)$; $\varphi(y)$ также данная функція, притомъ величина z должна удовлетворять уравненію $z=x+\varphi(z)$. Если дифференцируемъ въ отношеніи x обѣ части предъидущаго уравненія, то получимъ

$$\int\limits_{n-1} dx\,.\,.\int Rdx = \frac{1}{1.2.3..n-1}\int\limits_x^z F'(y).\,[x+\varphi(y)-y]^{n-1}\,dy - \frac{1}{1.2..n}\,F'(x)\,\varphi(x)^n\ ,$$

дифференцируя снова такимъ же образомъ, будетъ

$$\int\limits_{n-2} dx\,.\,.\int Rdx = \frac{1}{1.2.3..n-2}\int\limits_x^z F'(y).\,[x+\varphi(y)-y]^{n-2}dy - \frac{1}{1.2.3..n}\,\frac{d\,[F'(x)\,\varphi(x)^n]}{dx} - \frac{1}{1.2.3..n-1}\,F'(x).\,\varphi(x)^{n-1},$$

$$\int\limits_{n-3} dx\,.\,.\int Rdx = \frac{1}{1.2.3..n-3}\int\limits_x^z F'(y).[x+\varphi(y)-y]^{n-3}.dy - \frac{1}{1.2.3..n}\,\frac{d^2[F'(x)\varphi(x)^n]}{dx^2} - \frac{1}{1.2.3..(n-1)}\,\frac{d[F'(x)\varphi(x)^{n-1}]}{dx}$$
$$- \frac{1}{1.2.3..(n-2)}\,F'(x)\,\varphi(x)^{n-2};$$

и наконецъ

$$R=\int\limits_x^z F'(y)dy - \frac{1}{1.2.3..n}\,\frac{d^{n-1}.[F'(x)\varphi(x)^n]}{dx^{n-1}} - \frac{1}{1.2...n-1}\,\frac{d^{n-2}[F'(x)\varphi(x)^{n-1}]}{dx^{n-2}} - \ldots - \frac{1}{2}\,\frac{d[F'(x)\varphi(x)^2]}{dx} - F'(x)\varphi(x).$$

И какъ здѣсь
$$\int\limits_x^z F'(y)\,dy = F(z) - F(x)\ ,$$
то получимъ

$$F(z) = F(x) + F'(x)\,\varphi(x) + \frac{1}{2}\,\frac{d\,[F'(x)\,\varphi(x)^2]}{dx} + \,.\,.\, + \frac{1}{1.2.3..n}\,\frac{d^{n-1}\,[F'(x)\,\varphi(x)]}{dx^{n-1}} + R\ ;$$

слѣдовательно величина R представляетъ остатокъ Лагранжевой строки и выражается опредѣленнымъ интеграломъ:

$$R = \frac{1}{1.2.3..n}\,\frac{d^n}{dx^n}.\int\limits_x^z F'(y).\,\{x+\varphi(y)-y\}^n.\,dy\ .$$

Изъ приложеній Лагранжевой строки укажемъ на опредѣленіе величинъ *наибольшихъ* и *наименьшихъ* въ математической Метеорологіи. Періодическія явленія въ атмосферѣ по большей части могутъ быть представлены уравненіемъ:

$$P = A\cos(at+\alpha) + B\cos(bt+\beta) + \,.\,.\,,$$

въ которомъ A, B, a, b, α, β и пр. постоянныя количества, P есть функція перемѣнной величины t. Для опредѣленія самыхъ большихъ и самыхъ меньшихъ значеній P должно рѣшить уравненіе вида

$$A\sin(at+\alpha) + B(\sin bt+\beta) + \,.\,. = 0\ .$$

Чтобы установить понятіе на опредѣленномъ случаѣ, положимъ что первая часть уравненія состоитъ только изъ двухъ членовъ, то есть

$$A\sin(at+\alpha) + B\sin(bt+\beta) = 0\ .$$

Полагая здѣсь

$$t = \frac{x}{a} - \frac{\beta}{b}\ ,\quad \alpha = \frac{a\beta}{b} - \gamma\ ,\quad \frac{b}{a} = q\ ,\quad B=kA\ ,$$

гдѣ $k^2 < 1$, получимъ

$$\sin(x-\gamma) + k\sin q\,x = 0\ .$$

Корень этого уравненія, тотъ который приводится къ $x=\gamma$ при $k=0$, сначала напишется

$$x = \gamma - \text{arc.}\sin(k\sin q\,x)\ ,$$

и если ограничимся въ вычисленіи по Лагранжевой строкѣ количествами третьяго порядка въ отношеніи степеней k, то получимъ:

$$x = \gamma - k\sin q\gamma + k^2 q.\,\sin q\gamma\cos q\gamma - k^3 q^2\sin q\gamma + \frac{k^3\sin^3 q\gamma}{6}\,(9q^2-1)\ .$$

Впрочемъ способъ послѣдовательныхъ подстановленій, покрайней мѣрѣ въ численныхъ рѣшеніяхъ, ведетъ нерѣдко успѣшнѣе строки.

Выводъ формулъ, выражающихъ зависимость между углами многоугольника.

Извѣстно что сумма тангенсовъ угловъ въ треугольникѣ равна произведенію этихъ тангенсовъ; то есть:

$$\text{tang}\,A + \text{tang}\,B + \text{tang}\,C = \text{tang}\,A\ .\ \text{tang}\,B\ .\ \text{tang}\,C$$

Если возьмемъ четыреугольникъ, то, замѣчая что сумма угловъ четыреугольника равна $4d$ (гдѣ d означаетъ прямой уголъ), получимъ:

$$\tang(A+B+C+D) = \frac{\tang(A+B+C) + \tang D}{1 - \tang(A+B+C) . \tang D} = 0 \quad ,$$

или:

$$\tang(A+B+C) + \tang D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Но:

$$\tang(A+B+C) = \frac{\tang(A+B) + \tang C}{1 - \tang(A+B) . \tang C} \; , \; \tang(A+B) = \frac{\tang A + \tang B}{1 - \tang A . \tang B} \quad \ldots \quad (2)$$

Исключая изъ (1) и (2) $\tang(A+B+C)$ и $\tang(A+B)$, получимъ

$$\begin{aligned} \tang A + \tang B + \tang C + \tang D = {} & \tang A . \tang B . \tang C + \\ & + \tang A . \tang B . \tang D + \\ & + \tang A . \tang C . \tang D + \\ & + \tang B . \tang C . \tang D \end{aligned}$$

то есть: сумма тангенсовъ угловъ четыреугольника равна суммѣ различныхъ соединенiй изъ этихъ тангенсовъ по три.

Для пятиугольника находимъ:

$$\tang(A+B+C+D) + \tang E = 0 \quad ;$$

но замѣчая что:

$$\tang(A+B+C+D) = \frac{\tang(A+B+C) + \tang D}{1 - \tang(A+B+C) \tang D} \, , \quad \tang(A+B+C) = \frac{\tang(A+B) + \tang C}{1 - \tang(A+B) \tang C} \quad ,$$

$$\tang(A+B) = \frac{\tang A + \tang B}{1 - \tang A \tang B} \quad ,$$

и исключая изъ этихъ выраженiй тангенсы отъ суммы, получимъ:

$$\begin{aligned} \tang A + \tang B + \tang C + \tang D + \tang E = {} & \tang A . \tang B . \tang C - \tang A . \tang B . \tang C . \tang D . \tang E \\ & + \tang A . \tang B . \tang D \\ & + \tang A . \tang B . \tang E \\ & + \tang A . \tang C . \tang D \\ & + \tang A . \tang C . \tang E \\ & + \tang B . \tang C . \tang D \\ & + \tang B . \tang C . \tang E \\ & + \tang A . \tang D . \tang E \\ & + \tang B . \tang D . \tang E \\ & + \tang C . \tang D . \tang E \end{aligned}$$

т. е. сумма тангенсовъ угловъ пятиугольника равна суммѣ различныхъ соединенiй изъ этихъ тангенсовъ по три безъ произведенiя этихъ тангенсовъ.

Означая сумму тангенсовъ черезъ $\sum \tang A$; сумму различныхъ соединенiй изъ нихъ по три, черезъ $\sum \tang A . \tang B . \tang C$; сумму различныхъ соединенiй по пяти черезъ $\sum \tang A . \tang B . \tang C . \tang D . \tang E$ и т. д., получимъ для шестиугольника:

$$\sum \tang A = \sum \tang A . \tang B . \tang C - \sum \tang A . \tang B . \tang C . \tang D . \tang E \quad .$$

Для семиугольника:

$$\sum \tang A = \sum \tang A . \tang B . \tang C - \sum \tang A . \tang B . \tang C . \tang D . \tang E + \tang A . \tang B . \tang C . \tang D . \tang E . \tang F . \tang G \; .$$

И вообще, для многоугольника имѣющаго $2n$ угловъ, получимъ:

$$\sum \tang A = \sum \tang A . \tang B . \tang C - \sum \tang A . \tang B . \tang C . \tang D . \tang E + \ldots .$$

А для многоугольника, имѣющаго $2n+1$ угловъ:

$$\sum \operatorname{tang} A = \sum \operatorname{tang} A \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, \operatorname{tang} C - \sum \operatorname{tang} A . \operatorname{tang} B . \operatorname{tang} C . \operatorname{tang} D . \operatorname{tang} E + \ldots \pm \text{произв. тангенс.}$$

Если многоугольникъ правильный то получимъ:

$$2n \operatorname{tang} A = \overset{\frown}{(2n)}{}_c^{3} \,.\, \operatorname{tang}^3 A - \overset{\frown}{(2n)}{}_c^{5} \operatorname{tang}^5 A + \overset{\frown}{(2n)}{}_c^{7} \operatorname{tang}^7 A - \ldots$$

или:

$$(2n+1) \operatorname{tang} A = \overset{\frown}{(2n+1)}{}_c^{3} \operatorname{tang}^3 A - \overset{\frown}{(2n+1)}{}_c^{5} \operatorname{tang}^5 A + \overset{\frown}{(2n+1)}{}_c^{7} \operatorname{tang}^7 A - \ldots \pm \operatorname{tang}^{2n+1} A \,,$$

смотря потому, будетъ ли разсматриваемый многоугольникъ состоять изъ четнаго числа сторонъ, или изъ нечетнаго.

NB. Означенія, употребленныя нами въ послѣднихъ формулахъ предложены Г-мъ Лобачевскимъ.

Вообще $\overset{\frown}{(2n)}{}_c^{m}$ означаетъ $\dfrac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)\,(2n-3)\ldots(2n-(m-1))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots m}$.

Л. Износковъ.

21-го Августа, 1861 года.

О произвольныхъ функціяхъ.

(статья 2-ая См. N. 17).

Будемъ продолжать изслѣдованія о произвольныхъ функціяхъ. Для сего предложимъ себѣ найти значеніе слѣдующаго четвернаго интеграла:

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\int_{c\varepsilon}^{d\varepsilon}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} F(x\,,\psi\alpha\,;\,y\,,\varphi\beta)\,\Phi'(u\alpha)\,f'(v\beta)\,du\,dv\,d\alpha\,d\beta\ .$$

Въ немъ x и y не зависятъ отъ u, v, α, β; интегралы относительно α и β — сплошные: первый между предѣлами $a\varepsilon$ и $b\varepsilon$, а второй между $c\varepsilon$ и $d\varepsilon$, а

$$\int\int \Phi'(z)\,f'(\gamma)\,dz\,d\gamma = \Phi(z)\,f(\gamma) + C\,,$$

причемъ функціи $\Phi(z)$ и $f(\gamma)$ — сплошныя относительно предѣловъ интегрированія по α, β, u и v. Остальныя условія, при которыхъ можемъ найти значеніе разсматриваемаго интеграла, укажетъ самъ анализъ.

Проинтегрировавъ данный интегралъ по u и v, получимъ:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \Phi'(u\alpha)\,f'(v\beta)\,du\,dv = \left[\frac{\Phi\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) - \Phi(\varepsilon^2\alpha)}{\alpha}\right]\left[\frac{f\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right) - f(\varepsilon^2\beta)}{\beta}\right].$$

Въ слѣдствіе чего разсматриваемый интегралъ превратится: въ

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\int_{c\varepsilon}^{d\varepsilon} F(x\,,\psi\alpha\,;\,y\,,\varphi\beta)\left[\frac{\Phi\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) - \Phi(\varepsilon^2\alpha)}{\alpha}\right]\left[\frac{f\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right) - f(\varepsilon^2\beta)}{\beta}\right] d\alpha\,d\beta\ .$$

Измѣнивъ въ полученномъ интегралѣ перемѣнныя $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ на z и $\frac{\beta}{\varepsilon}$ на γ будемъ имѣть:

$$\int_a^b\int_c^d F(x\,,\psi\alpha\,;\,y\,,\varphi\beta)\left[\frac{\Phi(z) - \Phi(\varepsilon^3 z)}{z}\right]\left[\frac{f(\gamma) - f(\varepsilon^3\gamma)}{\gamma}\right] dz\,d\gamma\ .$$

Такъ какъ въ найденномъ интегралѣ x и y не зависятъ отъ α и β, то функція F можетъ быть вынесена за знакъ интеграла, при условіи, когда функціи $\psi\varepsilon z$ и $\varphi\varepsilon\gamma$ не будутъ зависѣть отъ z и γ; а для этого необходимо и достаточно чтобы $\psi\varepsilon z$ и $\varphi\varepsilon\gamma$, при $\varepsilon = 0$, обращались въ функціи $\psi(0)$ и $\varphi(0)$, — чему можно

удовлетворить, принимая a, b, c и d величинами конечными; но въ этомъ случаѣ данный интегралъ обращается въ близкопредѣльный. Имѣя-же въ виду рѣшить общнѣе предложенную задачу, намъ остается принять чтобы, покрайней мѣрѣ, a, c или b, d были безконечно большими, и постараться при этомъ найти тѣ условія, при которыхъ функція $F(x, \psi\varepsilon z; y, \varphi\varepsilon\gamma)$ могла-бы быть вынесена за знакъ интеграла. Съ этою цѣлью ра з ложимъ послѣдній интегралъ на сумму элементарныхъ значеній, и будемъ, при этомъ, для краткости называть.

$$F(x, \psi\varepsilon z; y, \varphi\varepsilon\gamma) = U, \quad \left[\frac{\Phi(z) - \Phi(\varepsilon^3 z)}{z}\right] \left[\frac{f(\gamma) - f(\varepsilon^3\gamma)}{\gamma}\right] = V.$$

Тогда:

$$\int_a^b UV\ \partial z = [UV\partial z]_{z=a} + [UV\partial z]_{z=a+h} + [UV\partial z]_{z=a+2h} + \ldots\ldots\ldots\ldots + [UV\partial z]_{z=b-h}$$

и:

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d UV\partial z\,\partial\gamma = {} & [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a\\ \gamma=c}} + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a+h\\ \gamma=c}} + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a+2h\\ \gamma=c}} + \ldots\ldots + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=b-h\\ \gamma=c}}\\
& [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a\\ \gamma=c+w}} + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a+h\\ \gamma=c+w}} + [UV\partial z.\partial\gamma]_{\substack{z=a+2h\\ \gamma=c+w}} + \ldots\ldots + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=b-h\\ \gamma=c+w}}\\
& [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a\\ \gamma=c+2w}} + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a+h\\ \gamma=c+2w}} + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a+2h\\ \gamma=c+2w}} + \ldots\ldots + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=b-h\\ \gamma=c+2w}}\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a\\ \gamma=d-w}} + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a+h\\ \gamma=d-w}} + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=a+2h\\ \gamma=d-w}} + \ldots\ldots + [UV\partial z\,\partial\gamma]_{\substack{z=b-h\\ \gamma=d-w}}\end{aligned}$$

Изъ полученнаго равенства видимъ, что для конечныхъ значеній z и γ, $F(x, \psi\varepsilon z; y, \varphi\varepsilon\gamma)$, при $\varepsilon = 0$, обращается въ $F(x, \psi 0; y, \varphi 0)$; для значеній же безконечно-большихъ $F(x, \psi\varepsilon z; y, \varphi\varepsilon\gamma)$. обращается въ $F(x, \psi\mu; y, \varphi\nu)$; а изъ этого слѣдуетъ, что, для дестиженія нашей цѣли, необходимо чтобы члены разложеній, содержащіе въ себѣ $F.(x, \psi\mu; y, \varphi\nu)$, сдѣлались независимыми отъ нея, т. е. обращались-бы въ нуль или-же въ неопредѣленность (*). Этого-же достигнемъ, когда функціи $\Phi(z)$ и $f(\gamma)$ для безконечныхъ значеній z и γ, каждая отдѣльно, будутъ обращаться въ 0 или въ $\frac{0}{0}$; и кромѣ того, когда функція $F(x, \psi\varepsilon z; y, \varphi\varepsilon\gamma)$ для этихъ значеній будетъ величиною конечною.

Впрочемъ она для безконечно-большихъ знаценій z и γ можетъ обращаться въ безконечность, только, приэтомъ, произведеніе этой безконечности на значенія функцій $\Phi(z)$ и $f(\gamma)$, при $z = \infty$, $\gamma = \infty$, должно обращаться въ 0 или въ $\frac{0}{0}$.

Кромѣ того, если приэтомъ a, b, c и d будутъ безконечности не выше втораго порядка, (т. е $a = -\frac{p}{\varepsilon^2}$, $b = +\frac{q}{\varepsilon^2}$, $c = -\frac{r}{\varepsilon^2}$, $d = +\frac{s}{\varepsilon^2}$, и функціи $\Phi(z)\, f(\gamma)$ — нечетныя, то $\Phi(\varepsilon^3 z)$ и $f(\varepsilon^3\gamma)$, при $\varepsilon = 0$ обратятся въ нули, — и взявъ функцію $F(x, \psi 0; y, \varphi 0)$ за общій множитель, мы въ скобкахъ получимъ сумму элементарныхъ значеній двойнаго интеграла.

$$\int_a^b\int_c^d \frac{\Phi(z)\, f(\gamma)}{z\,\gamma}\,\partial z\,\partial\gamma\ ;$$

въ слѣдствіе чего искомый интегралъ получитъ слѣдующее значеніе:

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\int_{c\varepsilon}^{d\varepsilon}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} F(x, \psi\alpha; y, \varphi\beta)\, \Phi'(u\alpha)\, f'(v\beta)\, \partial u\, \partial v\, \partial\alpha\, \partial\beta = F(x, \psi 0; y, \varphi 0) \int_a^b\int_c^d \frac{\Phi(z)\, f(\gamma)}{z\,\gamma}\,\partial z\,\partial\gamma.$$

Или, назвавъ значеніе интеграла

(*) Мы понимаемъ здѣсь неопредѣленность въ родѣ $\sin(\infty)$.

$$\int_a^b\int_c^d \frac{\Phi(z)\,f(\gamma)}{z\,\gamma}\,\partial z\,\partial\gamma = \omega\,.$$

получимъ:

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\int_{c\varepsilon}^{d\varepsilon}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} F(x\,,\psi\alpha\,;\,y\,,\varphi\beta)\,\Phi'(u\alpha)\,f'(v\beta)\,\partial u\,\partial v\,\partial\alpha\,\partial\beta = \omega\,F(x\,,\psi 0\,;\,y\,,\varphi 0)\,,$$

откуда находимъ теорему:

$$\text{I)}\qquad F(x\,,\psi 0\,;\,y\,,\varphi 0) = \frac{1}{\omega}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\int_{c\varepsilon}^{d\varepsilon}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} F(x\,,\psi\alpha\,;\,y\,,\varphi\beta)\;\Phi'(u\alpha)\,f'(v\beta)\,\partial u\,\partial v\,\partial\alpha\,\partial\beta\,.$$

Точно также разсуждая, нашли бы: для $2n$ кратнаго интеграла:

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\int_{c\varepsilon}^{d\varepsilon}\int_{e\varepsilon}^{f\varepsilon}\cdots\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdots F(x\,,\psi\alpha\,;\,y\,,\varphi\beta\,;\,z\,,\xi\gamma\,;\ldots)\,\Phi'(u\alpha)\,f'(v\beta)\,V'(w\gamma)\ldots\partial u\,\partial v\,\partial w\ldots\partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma\ldots$$

$$= F(x\,,\psi 0\,;\,y\,,\varphi 0\,;\,z\,,\xi 0\,;\ldots)\int_a^b\int_c^d\int_e^f\cdots\frac{\Phi(\delta)\,f(\xi)\,V(\zeta)}{\delta\;\xi\;\zeta}\,\partial\delta\,\partial\xi\,\partial\zeta\,,$$

а отсюда теорему:

$$\text{II)}\ F(x,\psi 0;y,\varphi 0;z,\xi 0;\ldots) = \frac{1}{\omega}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\int_{c\varepsilon}^{d\varepsilon}\int_{e\varepsilon}^{f\varepsilon}\cdots\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\ldots F(x,\psi\alpha;y,\varphi\beta;z,\xi\gamma;\ldots)\Phi'(u\alpha)f'(v\beta)V'(w\gamma)\ldots\partial u\partial v\partial w\ldots\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma\ldots,$$

гдѣ ω опредѣляется интеграломъ:

$$\omega = \int_a^b\int_c^d\int_e^f\cdots\frac{\Phi(\delta)\,f(\xi)\,V(\zeta)}{\delta\;\xi\;\zeta}\,\partial\delta\,\partial\xi\,\partial\zeta\ldots.$$

Изъ теоріи произвольныхъ функкій вытекаетъ слѣдующее свойство $2n$ кратнаго интеграла:

$$\int_{\varepsilon^2}^{p}\int_{\varepsilon^2}^{q}\int_{\varepsilon^2}^{r}\cdots\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\ldots F(x,\psi\alpha\,;\,y,\varphi\beta\,;\,z\,,\xi\gamma\,;\ldots)\,\Phi'(u\alpha)\,f'(v\beta)\,V'(w\gamma)\ldots\partial u\,\partial v\,\partial w\ldots\partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma\ldots=$$

$$\int_{\varepsilon^2}^{\mu}\int_{\varepsilon^2}^{\nu}\int_{\varepsilon^2}^{\lambda}\cdots\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\ldots F(x\,,\psi\alpha\,;\,y\,,\varphi\beta\,;\,z\,,\xi\gamma\,;\ldots)\,\Phi'(u\alpha)\,f'(v\beta)\,V'(w\gamma)\ldots\partial u\,\partial v\,\partial w\ldots\partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma\ldots(*)$$

Гдѣ $p\,,\,q\,,\,r\,,\ldots$ величины, при которыхъ теорема (II) имѣетъ мѣсто, а $\mu\,,\,\nu\,,\,\lambda\,,\ldots$ величины конечныя, по произволенію малыя и одинаковыхъ знаковъ съ $p\,,\,q\,,\,r\,,\ldots$

Кромѣ того, такъ какъ анализъ, употребленный при доказательствѣ теоремъ, выражающихъ произвольныя функкіи объ двухъ, трехъ и вообще n перемѣнныхъ, ничѣмъ не отличается отъ анализа, употребленнаго нами при доказательствѣ теоремы, выражающей произвольную функцію объ одной перемѣнной, то замѣчанія, сдѣланныя нами на счетъ интегрируемости двойнаго интеграла въ предѣлѣ, внѣ предѣла и обратнаго способа интегрированія, вполнѣ имѣютъ мѣсто и для $2n$ кратнаго интеграла.

Сдѣлаемъ приложеніе формулы (I) къ частному случаю.

Положимъ въ ней: $a\varepsilon = \varepsilon^2$, $b\varepsilon = m$; $c\varepsilon = \varepsilon^2$, $d\varepsilon = m$, $x = 0$, $y = 0$, $F(\psi\alpha\,,\varphi\beta) = e^{\alpha+\beta}$, $\Phi(z) = \sin z$, $f(\gamma) = \sin\gamma$; тогда: $F(\psi 0\,,\varphi 0) = 1$, $\Phi'(z) = \cos z$, $f'(\gamma) = \cos\gamma$,

(*) Очевидно, оно распространяется и на отрицательные предѣлы.

$$\omega = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} \,.\, \frac{\sin \gamma}{\gamma}\, \partial z\, \partial \gamma = \frac{\pi}{4} \;,$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \int_0^m\!\!\int_0^m\!\!\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{\alpha+\beta} \cos u\alpha \cos v\beta\, \partial u\, \partial v\, \partial \alpha\, \partial \beta \;;$$

или, интегрируя въ отношеніи α и β, получимъ:

$$\frac{\pi^2}{4} = \int_0^\infty \frac{e^m \cos mu + e^m u \sin mu - 1}{1+u^2}\, \partial u \int_0^\infty \frac{e^m \cos mv + e^m v \sin mv - 1}{1+v^2}\, \partial v \;.$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \left(\int_0^\infty \frac{e^m \cos mu + e^m u \sin mu - 1}{1+u^2}\, \partial u\right)^2 ,$$

или $$\pi\, e^{-m} = \int_0^\infty \frac{\cos mu}{1+u^2}\, \partial u + \int_0^\infty \frac{u \sin mu}{1+u^2}\, \partial u \;.$$

Продифференцировавъ последнее равенство, въ отношеніи m, n разъ, найдемъ:

$$a)\qquad \pi\, e^{-m} = \cos.\, n\frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{u^n \cos mu}{1+u^2}\, \partial u + \sin.\, n\frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{u^n \sin mu}{1+u^2}\, \partial u \;,$$

помня только приэтомъ, что во второй части послѣдняго равенства въ первомъ интегралѣ n есть число вида $2p$, а во второмъ — вида $2p+1$.

Такому условію подчиняется величина n когда m не 0. Но если $m=0$; то, очевидно, для сохраненія послѣдняго равенства, необходимо дабы, въ немъ n было >0 и <2.

Принявъ въ соображеніе сей часъ сказанное, и вспомнивъ что

$$0 = \int_0^\infty \frac{u \sin mu - \cos mu}{1+u^2}\, \partial u \;,$$

сдѣлаемъ въ равенствѣ (a) $m=0$; тогда получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{u^n}{1+u^2}\, \partial u = \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos n\frac{\pi}{2}} \;.$$

А полагая здѣсь $u^2 = x$, и принимая $\frac{n-1}{2} = a - 1$, будемъ имѣть:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, \partial x = \frac{\pi}{\cos\left(a\pi - \frac{\pi}{2}\right)} \;,$$

или $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, \partial x = \frac{\pi}{\sin a\pi} \;,$$ гдѣ $a>0$ и <1.

Послѣдній интегралъ былъ въ первый разъ данъ Эйлеромъ.

Напишемъ теорему (II) въ слѣдующемъ видѣ:

$$F(x,0;y,0;z,0;\ldots)=\frac{1}{\omega}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\int\limits_{c\varepsilon}^{d\varepsilon}\int\limits_{e\varepsilon}^{f\varepsilon}\ldots\int\limits_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int\limits_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int\limits_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\ldots F(x,\alpha;y,\beta;z,\gamma;\ldots)\,\Phi'(u\alpha)\,f'(v\beta)\,V'(w\gamma)\ldots\partial u\,\partial v\,\partial w\ldots\partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma\ldots$$

гдѣ:
$$\omega=\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d}\int\limits_{e}^{f}\ldots\frac{\Phi(\delta)\,f(\xi)\,V(\zeta)}{\delta\;\xi\;\zeta}\,\partial\delta\,\partial\xi\,\partial\zeta\ldots$$

и сдѣлаемъ въ послѣдней формулѣ:

$$a\varepsilon=-x\,,\ c\varepsilon=-y\,,\ b\varepsilon=m-x\,,\ d\varepsilon=p-y\,,\ e\varepsilon=-z\,,\ f\varepsilon=q-z\,,$$

$F(x,\alpha;y,\beta;z,\gamma;\ldots)=F(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma,\ldots)$; тогда: $F(x,0;y,0;z,0;\ldots)=F(x,y,z,\ldots)$,

$$\omega=\int\limits_{-\frac{x}{\varepsilon}}^{\frac{m-x}{\varepsilon}}\int\limits_{-\frac{y}{\varepsilon}}^{\frac{p-y}{\varepsilon}}\int\limits_{-\frac{z}{\varepsilon}}^{\frac{q-z}{\varepsilon}}\ldots\frac{\Phi(\delta)\,f(\xi)\,V(\zeta)}{\delta\;\xi\;\zeta}\,\partial\delta\,\partial\xi\,\partial\zeta\ldots$$

или:
$$\omega=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\frac{\Phi(\delta)\,f(\xi)\,V(\zeta)}{\delta\;\xi\;\zeta}\,\partial\delta\,\partial\xi\,\partial\zeta\ldots,$$

при условіи, чтобы $m-x$, $p-y$, $q-z$, . . . были числами положительными, — (въ противномъ же случаѣ ω, по каждой изъ перемѣнныхъ, будетъ равно 0). Тогда:

$$F(x,y,z,\ldots)=\frac{1}{\omega}\int\limits_{-x}^{m-x}\int\limits_{-y}^{p-y}\int\limits_{-z}^{q-z}\ldots\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\ldots F(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma,\ldots)\,\Phi'(u\alpha)\,f'(v\beta)\,V'(w\gamma)\ldots\partial u\,\partial v\,\partial w\ldots\partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma\ldots$$

Полагая здѣсь: $\Phi(\delta)=f(\xi)=V(\zeta)=\sin(\delta)$, найдемъ:

$$\pi^n F(x,y,z,\ldots)=\int\limits_{-x}^{m-x}\int\limits_{-y}^{p-y}\int\limits_{-z}^{q-z}\ldots\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\ldots F(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma,\ldots)\cos u\alpha.\cos v\beta.\cos w\gamma\ldots\partial u\,\partial v\,\partial w\ldots\partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma\ldots$$

На основаніи же свойства $2n$ кратнаго интеграла имѣемъ:

$$\pi^n F(x,y,z,\ldots)=\int\limits_{-i}^{+i}\int\limits_{-k}^{+k}\int\limits_{-l}^{+l}\ldots\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\ldots F(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma,\ldots)\cos u\alpha.\cos v\beta.\cos w\gamma\ldots\partial u\,\partial v\,\partial w\ldots\partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma\ldots$$

гдѣ i, k, l, . . . удовлетворяютъ выше означеннымъ условіямъ.

Замѣняя во второй части, послѣдняго равенства, интегралы, взятые между предѣлами отъ 0 до ∞, сигмами, взятыми между предѣлами отъ 0 до t, (предполагая t числомъ безконечнымъ) получимъ:

$$J=\int\limits_{-i}^{+i}\int\limits_{-k}^{+k}\int\limits_{-l}^{+l}\ldots\sum_{0}^{t}\sum_{0}^{t}\sum_{0}^{t}\ldots F(x+\alpha,\,y+\beta,\,z+\gamma,\ldots)\cos u\alpha\,.\cos v\beta\,.\cos w\gamma\ldots\partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma\ldots;$$

но:
$$\sum_{0}^{t}\cos u\alpha=\frac{\sin(t-\frac{1}{2})\,\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\sin t'\,\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}$$

$$\sum_{0}^{t}\cos v\beta=\frac{\sin(t-\frac{1}{2})\,\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\sin t'\,\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{2}$$

$$\sum_{0}^{t} \cos w\gamma = \frac{\sin\left(t-\frac{1}{2}\right)\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{\sin t'\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{2};$$

. . . . где $t' = t - \frac{1}{2}$.

Слѣдовательно:

$$J = \int_{-i}^{+i}\int_{-k}^{+k}\int_{-l}^{+l} \ldots F(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots)\left[\frac{\sin t'\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}\right]\left[\frac{\sin t'\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{2}\right]\left[\frac{\sin t'\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}}+\frac{1}{2}\right]\ldots \partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma \ldots$$

Отсюда, на основаніи началъ интегральнаго исчисленія, находимъ:

$$J = F(x+\theta i, y+\theta' k, z+\theta'' l, \ldots)\int_{-i}^{+i}\int_{-k}^{+k}\int_{-l}^{+l}\ldots\left[\frac{\sin t'\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}\right]\left[\frac{\sin t'\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{2}\right]\left[\frac{\sin t'\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}}+\frac{1}{2}\right]\ldots \partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma \ldots$$

или:

$$J = F(x+\theta i, y+\theta' k, z+\theta'' l, \ldots)\left[\int_{-i}^{+i}\frac{\sin t'\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\partial\alpha + \int_{-i}^{+i}\frac{\partial\alpha}{2}\right]\left[\int_{-k}^{+k}\frac{\sin t'\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}\partial\beta + \int_{-k}^{+k}\frac{\partial\beta}{2}\right]\left[\int_{-l}^{+l}\frac{\sin t'\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\partial\gamma + \int_{-l}^{+l}\frac{\partial\gamma}{2}\right]\ldots$$

или:

$$J = F(x+\theta i, y+\theta' k, z+\theta'' l, \ldots)\left[\int_{0}^{i}\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin t'\alpha}{\frac{\alpha}{2}}\partial\alpha + \int_{-i}^{+i}\frac{\partial\alpha}{2}\right]\left[\int_{0}^{k}\frac{\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{\sin t'\beta}{\frac{\beta}{2}}\partial\beta + \int_{-k}^{+k}\frac{\partial\beta}{2}\right]$$
$$\left[\int_{0}^{l}\frac{\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{\sin t'\gamma}{\frac{\gamma}{2}}\cdot\partial\gamma + \int_{-l}^{+l}\frac{\partial\gamma}{2}\right]\ldots$$

или:

$$J = F(x+\theta i, y+\theta' k, z+\theta'' l, \ldots)\left[\frac{\frac{\lambda i}{2}}{\sin\frac{\lambda i}{2}}\int_{0}^{i}\frac{\sin t'\alpha}{\frac{\alpha}{2}}\partial\alpha + \int_{-i}^{+i}\frac{\partial\alpha}{2}\right]\left[\frac{\frac{\lambda' k}{2}}{\sin\frac{\lambda' k}{2}}\int_{0}^{k}\frac{\sin t'\beta}{\frac{\beta}{2}}\partial\beta + \int_{-k}^{+k}\frac{\partial\beta}{2}\right]$$
$$\left[\frac{\frac{\lambda'' l}{2}}{\sin\frac{\lambda'' l}{2}}\int_{0}^{l}\frac{\sin t'\gamma}{\frac{\gamma}{2}}\partial\gamma + \int_{-l}^{+l}\frac{\partial}{2}\right]^{(*)}\ldots$$

или:

$$J = F(x, y, z, \ldots)\left[\int_{0}^{i}\frac{\sin t'\alpha}{\frac{\alpha}{2}}\partial\alpha + \int_{-i}^{+i}\frac{\partial\alpha}{2}\right]\left[\int_{0}^{k}\frac{\sin t'\beta}{\frac{\beta}{2}}\partial\beta + \int_{-k}^{+k}\frac{\partial\beta}{2}\right]\left[\int_{0}^{l}\frac{\sin t'\gamma}{\frac{\gamma}{2}}\partial\gamma + \int_{-l}^{+l}\frac{\partial\gamma}{2}\right]^{(**)}\ldots$$

А отсюда заключаемъ, что для возможности замѣны интеграловъ сигмами надобно въ данномъ выраженіи отъ каждаго подъинтегральнаго множителя отнять по $\frac{1}{2}$.

И дѣйствительно, тогда въ послѣднемъ равенствѣ интегралы $\int_{-i}^{+i}\frac{\partial\alpha}{2}$, $\int_{-k}^{+k}\frac{\partial\beta}{2}$, $\int_{-l}^{+l}\frac{\partial\gamma}{2}$, ...

(*) Числа $\theta, \theta', \theta''\ldots$ заключаются между -1 и $+1$, а числа $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ между 0 и 1.

(**) Ибо $i, k, l, \ldots$ числа по произволенію малыя.

пропадутъ, и мы получимъ:

$$J=F(x,y,z,\dots)\int_0^i \frac{\sin t'\alpha}{\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha\,.\int_0^k \frac{\sin t'\beta}{\frac{\beta}{2}}\,d\beta\,.\int_0^l \frac{\sin t'\gamma}{\frac{\gamma}{2}}\,d\gamma\,\dots\dots$$

Откуда, послѣ замѣны перемѣнныхъ: $t'\alpha=\delta$, $t'\beta=\xi$, $t'\gamma=\zeta$, ..., найдемъ:

$$J=\pi^n F(x,y,z,\dots).$$

А такимъ образомъ можетъ написать слѣдующую формулу:

$$\pi^n F(x,y,z,..)=\int_{-x}^{m-x}\int_{-y}^{p-y}\int_{-z}^{q-z}\dots\sum_0^t\sum_0^t\sum_0^t\dots F(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma,..)\left[\cos(u\alpha)-\frac{1}{2}\right]\left[\cos(v\beta)-\frac{1}{2}\right]\left[\cos(w\gamma)\ \frac{1}{2}\right]\dots d\alpha\, d\beta\, d\gamma\dots$$

Или, замѣнивъ въ ней перемѣнныя $x+\alpha=\lambda$, $y+\beta=\mu$, $z+\gamma=\nu$, ..., найдемъ формулу

$$\pi^n F(x,y,z,..)=\int_0^m\int_0^p\int_0^z\dots\sum_0^t\sum_0^t\sum_0^t\dots F(\lambda,\mu,\nu,\dots)\left[\cos u(\lambda-x)-\frac{1}{2}\right]\left[\cos v(\mu-y)-\frac{1}{2}\right]\left[\cos w(\nu-z)-\frac{1}{2}\right]\dots d\lambda\, d\mu\, d\nu\dots$$

удостовѣряющую насъ въ сходимости ряда, выражающаго разложеніе произвольной функціи отъ n перемѣнныхъ угловъ по синусамъ и косинусамъ этихъ угловъ.

Августъ 1861 года.

Н. Коціевскій.

Доказательство положенія геометріи:

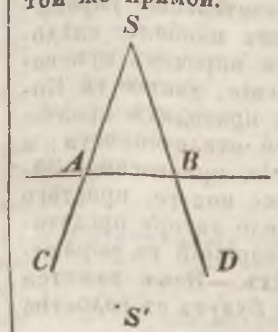
прямая, соединяющая двѣ точки въ пространствѣ, короче всякой ломаной между тѣми же точками.

Эвклидово опредѣленіе прямой линіи есть отвлеченіе, основанное на томъ представленіи, какое мы пріобрѣтаемъ изъ наблюденія надъ твердымъ тѣломъ, вращающимся около двухъ неподвижныхъ точекъ; а именно: прямая линія есть ось вращенія тѣла, то есть рядъ точекъ, которыя не перемѣняютъ своего мѣста въ пространствѣ, во время движенія тѣла. Изъ этого опредѣленія прямо слѣдуетъ, что *если двѣ прямыя имѣютъ двѣ общія точки, то сливаются и въ прочихъ точкахъ на всемъ протяженіи.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A и B двѣ точки твердаго тѣла, служащія опорою въ пространствѣ, при перемѣщеніи прочихъ частей тѣла. Но лишь только обращеніе тѣла началось, какъ между A и B, и по другую ихъ сторону, означится непрерывный рядъ точекъ M, M' . . . также неподвижныхъ. Слѣдовательно опору изъ A можно перенести, напримѣръ въ M, опору изъ B перенести въ M', наблюдая притомъ, чтобы раствореніе циркуля $\overline{MM'}$ было равно $\overline{AB}$. Въ движеніи тѣла ничего не перемѣнится, слѣдовательно часть $\overline{MM'}$ прямой линіи тожественна съ $\overline{AB}$. Отсюда же слѣдуетъ, что *пересѣченіе двухъ прямыхъ происходитъ въ одной только точкѣ*, потому что, предположивъ двѣ таковыхъ точки, мы принудили бы сливаться прямыя и во всѣхъ прочихъ точкахъ.

Опредѣленіе плоскости составляетъ въ начальной Геометріи постулатъ. Можно движеніемъ прямой AB, по двумъ пересѣкающимся прямымъ BD и AC, построить непрерывную поверхность линейчатую; и если назовемъ эту поверхность *плоскостію*, то еще невидно непосредственно, чтобы прямая линія сливалась съ плоскостію, въ какомъ бы направленіи ни-были избраны на плоскости двѣ точки, составляющія концы прямой. Если это послѣднее свойство принимаютъ за самое опредѣленіе плоскости, то нужно показать способъ для построенія такой поверхности, или доказать возможность требованія. Затѣмъ слѣдуютъ въ начальной Геометріи нѣсколько предложеній, представляющихъ полную очевидность: черченіе на плоскости круга, измѣреніе угла между двумя радіусами круга соотвѣтственною дугою окружности, опредѣленіе угловъ прямаго, остраго и тупаго. Всѣ прямые углы равны между собою. Сумма смѣжныхъ равна двумъ прямымъ; углы вертикальные равны между собою.—Начнемъ отсюда наше доказательство.

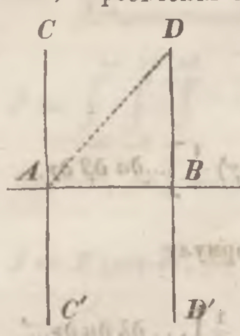
Предложеніе. Изъ точки S, взятой внѣ прямой $\overline{AB}$, невозможно провести двухъ перпендикуляровъ къ той же прямой.



Доказательство. Допустивъ два перпендикуляра SA и SB, оборотимъ тр—къ ASB около основанія AB до новаго совпаденія съ плоскостію CSD; линія AS должна упасть на свое продолженіе AC, линія SB на свое продолженіе BD, образуя прямые углы CAB и DBA; притомъ линіи эти должны пересѣкаться здѣсь въ нѣкоторой точкѣ S', куда именно упадетъ точка S. Но такимъ

образомъ прямыя SAS' и SBS' были бы принуждены пересѣкаться въ двухъ точкахъ S и S т. е. сливаться въ одну прямую.

Слѣдствіе. Перпендикулярныя AC и BD къ одной прямой AB, также и продолженія ихъ AC' и BD', пересѣченія имѣть не могутъ.

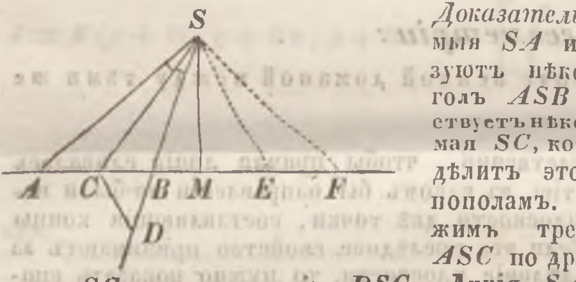


Предложеніе. Если изъ точки D, взятой гдѣ нибудь на DB, перпендикулярной къ AB, проведется DA пересѣкающая прямую AB въ точкѣ A, то уголъ DAB будетъ острый.

Доказательство. Чрезъ точку A проведемъ AC перпендикулярную къ AB. Прямыя AC и BD, по предъидущему слѣдствію, пересѣченія имѣть не могутъ, поэтому всякая AD пересѣкающая BD проходитъ внутри угла BAC, то есть подъ угломъ DAB, который менѣе прямаго угла.

Слѣдствіе. Если въ треугольникѣ одинъ уголъ прямой, то оба другіе непремѣнно острые.

Теорема. Изъ двухъ косвенныхъ SA и SB, лежащихъ по одну сторону перпендикуляра SM, внутренняя SB короче внѣшней SA.



Доказательство. Прямыя SA и SB образуютъ нѣкоторый уголъ ASB, и существуетъ нѣкоторая прямая SC, которая раздѣлитъ этотъ уголъ пополамъ. Переложимъ треугольникъ ASC по другую сторону SC, въ положеніе DSC. Линія SA пойдетъ по SB, тупой уголъ SCA отмѣритъ равный себѣ уголъ SCD, такъ что прямая CD пройдетъ внѣ угла остраго SCM; слѣдовательно линія SD будетъ длиннѣе линіи SB, какъ цѣлое болѣе своей части.

Теорема. Перпендикуляръ, опущенный изъ точки S на прямую AF короче всякой прямой SA, проведенной изъ S косвенно къ AM.

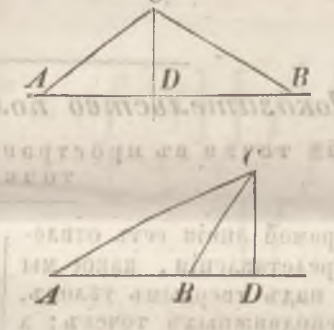
Доказательство. Линіи $SA > SC$, $SC > SB$ и такъ далѣе. Сколько бы ни-была точка A близка къ M, всегда возможно взять между A и M другую точку B, для которой косвенная SB будетъ короче SA; слѣдовательно въ углѣ SMA перпендикуляръ SM есть предѣлъ косвенныхъ линій и въ тоже время предѣлъ сокращенія разстояній точки S отъ линіи AM. Подобнымъ образомъ и тоже свойство линіи SM докажется въ отношеніи косвенныхъ SE, SF и пр., проведенныхъ въ углѣ SMF.

Слѣдствіе. Окружность, описанная изъ S какъ изъ центра, радіусомъ SM, коснется прямой AF въ одной только точкѣ.

Теорема. Ломаная линія $AC + CB$ болѣе прямой AB, замыкающей треугольникъ ACB.

Доказательство. Опустимъ изъ C перпендикуляръ на AB. Если онъ упадетъ въ D, между точекъ A и B, то будетъ $AC > AD$, $BC > BD$; слѣдоват. $AC+BC>AD+BD$. Если же точка D упадетъ внѣ треугольника ABC, то получимъ $AC > AD$, $BC > BD$; слѣдовательно

$AC + BC > AD + BD > AB$.



Что къ этому оставалось бы прибавить, то уже весьма просто.

Сентябрь, 1861. *А. Поповъ.*

II.

Библіографическій указатель.

33. Leçons de calcul des variations par *L. Lindelöf*, Professeur de Mathématiques à l'Université de Helsingfors Paris 1861.

Это сочиненіе, обнимающее послѣдніе успѣхи важной отрасли анализа, представляетъ значительныя упрощенія формулъ Сарруса и Коши, коимъ наиболѣе слѣдовалъ авторъ. Онъ не соглашается впрочемъ присвоить *варіаціи* новое общее опредѣленіе, данное ей Коши, которое, нельзя не сознаться, приводитъ понятіе объ измѣненіи функцій къ крайней отвлеченности; и потому онъ удерживаетъ ей значеніе, присвоенное Эйлеромъ и Лагранжемъ. Введеніе же новаго, простаго символическаго обозначенія позволило автору представить главныя теоремы вычисленія варіацій въ выраженіяхъ совершенно строгихъ и ясныхъ.—Намъ кажется что и наиболѣе компетентные судьи будутъ съ радостію привѣтствовать появленіе этого прекраснаго труда нашего молодаго Гельсингфорскаго профессора.

34. A. History of the progres of the calculus of variations during the nineteenth century. *By J. Todhunter.* M. A. Fellow and principal mathematial Lecturer of St. John College, Cambridge. 1861.

Это обширное сочиненіе содержитъ подробную исторію развитія варіаціоннаго исчисленія въ 19-мъ столѣтіи и вполнѣ знакомитъ съ литературою по сему предмету; оно можетъ служить прекраснымъ дополненіемъ, или если угодно, введеніемъ къ предъидущему курсу.

35. *Anger C. T.* Populare Vortrage über Astronomie. Danzig 1862.

Это, посмертное изданіе лекцій одного изъ самыхъ

даровитыхъ учениковъ Бесселя, читанныхъ имъ въ Данцигѣ въ 1856 и 57 годахъ, по случаю появленія 3-й части Гумбольдтова »Космоса«, отличается отъ всѣхъ популярныхъ астрономическихъ сочиненій какъ по самому изложенію, такъ и по главной путеводной идеѣ онаго, стремящейся ознакомить читателя съ сущностію строгихъ методъ изслѣдованія, которыя привели науку въ ея настоящее высокое состояніе — Этой книгѣ можно пожелать преимущественнаго распространенія передъ другими, подобными ей по названію; и русская ученая литература можетъ расчитывать на вѣрное пріобрѣтеніе, если кто либо изъ спеціалистовъ возьмется за переводъ оной.

36. *Neue Elemente der Mechanik*, von *K. H. Schellbach.* Berlin 1860.

Главное достоинство этого сочиненія, составленнаго для гимназическаго употребленія, заключается въ томъ, что, при богатствѣ содержанія, авторъ съ весьма ограниченными средствами, какія представляютъ начальная математика и аналитическая геометрія, разрѣшаетъ задачи, далеко выходящія изъ элементарнаго круга; поэтому, что касается изложенія и особенностей употребляемыхъ авторомъ методъ; то сочиненіе это можетъ съ пользою служить какъ приготовительный курсъ для высшей математики.

37. Prolusione ad un corso di Geometria superiore dal Dottor *Luigi Cremone* Milano 1861.

Это сочиненіе служитъ собственно введеніемъ къ курсу высшей геометріи, излагаемому авторомъ въ Болонскомъ Университетѣ: но оно дастъ ясное понятіе о направленіи, методахъ и содержаніи новой науки и потому заслуживаетъ быть указаннымъ.

Г.

III.

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1) Въ N. 11 »Вѣстника мат. наукъ« напечатано было извлеченіе изъ мемуара Гогена о цилиндрическихъ конденсаторахъ. Разсматривая нынѣ всѣ послѣдующіе мемуары Гогена, какъ о распространеніи электричества въ полупроводникахъ, такъ и въ конденсаторахъ, мы замѣчаемъ, что главная цѣль его изслѣдованій показать сходство между распространеніемъ, такъ называемаго статическаго электричества и гальваническаго тока. Изъ всѣхъ результатовъ Гогена видно, что распространеніе статическаго электричества слѣдуетъ закону Ома. Поэтому Гогенъ объясняетъ дѣйствіе конденсаторовъ помощію непрерывнаго распространенія электричества, предполагая, что средина, раздѣляющая двѣ поверхности конденсатора, проводитъ электричество, хотя въ слабой степени, и тогда распространеніе электричества соотвѣтствуетъ гальваническому току. Выведенная формула для сопротивленія индукціи въ цилиндрическихъ концентрическихъ конденсаторахъ:

$$\varrho = k \log \frac{R}{r}$$

должна быть одинаковою съ формулой для прохожденія гальваническаго тока между цилиндрическими, концентрическими электродами, раздѣленными напримѣръ жидкостью. Гогенъ не представилъ намъ сравнительнаго опыта; но мы имѣемъ изслѣдванія А. Савельева, б. Пр. Каз. Универ., который выразилъ сопротивленіе жидкаго слоя, заключеннаго между цилиндрическими концентрическими электродами формулою

$$W = \frac{\pi}{\log 2} \log \frac{R}{r}.$$

и подтвердилъ ее опытами.

Согласіе двухъ этихъ выводовъ показываетъ справедливость высказанной теоріи.

Въ настоящее время Гогенъ продолжаетъ изслѣдованіе о конденсаторахъ, и уже публиковалъ результаты для случая плоскихъ и сферическихъ поверхностей

Плоскіе круглые конденсаторы были заключены въ цилиндрическую мѣдную трубку, и разстояніе между ними измѣнялось такъ, что линія, соединяющая центры дисковъ, оставалась перпендикулярною къ ихъ плоскости; заряды, индукцирующій и индукцированный были измѣряемы помощію электроскоповъ. Соотвѣтственный тому опытъ былъ произведенъ и съ помощію гальванической батареи, причемъ между двумя круговыми электродами находился слой раствора мѣднаго купороса. Согласно ожиданіямъ оказалось: — 1) съ измѣненіемъ разстоянія дисковъ индукцирующій зарядъ и напряженіе гальваническаго тока измѣнялись въ одинаковомъ отношеніи. 2) какое отношеніе было между цѣлымъ токомъ и производнымъ (т. е. когда онъ прошелъ чрезъ жидкій цилиндрическій слой); такое же самое отношеніе существуетъ между индукцирующимъ и индукцированнымъ зарядами.

Въ случаѣ сферическихъ, концентрическихъ конденсаторовъ, полагая что радіусъ внутренняго шара $= r$ а внѣшняго $= R$, и что внутренній шаръ сообщенъ съ постоянныхъ источникомъ электричества, а внѣшній съ землею: зарядъ внутренней и внѣшней сферическихъ поверхностей выражается въ функціи R и r. Предполагая, что средина между конденсаторами проводитъ электричество, но гораздо слабѣе конденсаторовъ, задача приводится къ опредѣленію напряженія тока, проходящаго отъ внутренняго шара къ внѣшнему. Гогенъ (*) предполагаетъ двѣ концентрическія сферы очень близкія между собою, которыхъ радіусы x и $x + dx$; x гораздо менѣе R и гораздо болѣе r. Сопротивленіе средины, между поверхностями этихъ сферъ будетъ

$$k \frac{dx}{x^2},$$

k постоянный коэффиціентъ: это сопротивленіе будетъ

(*) Comptes rendus. 20 Septembre 1861.

дифференціалъ сопротивленія слоя, заключающагося между сферами, коихъ радіусы r и x: слѣдовательно цѣлое сопротивленіе будетъ:

$$k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x}\right).$$

Поэтому сопротивленіе слоя между сферами, коихъ радіусы R и r будетъ:

$$K\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right);$$

слѣдовательно напряженіе тока будетъ пропорціонально величинѣ

$$\frac{Rr}{R-r} \ldots\ldots (a)$$

Согласно съ высказанною теоріею, зарядъ внутренняго конденсатора, въ случаѣ статическаго электричества, долженъ быть пропорціоналенъ той же самой величинѣ (a). Опыты, произведенные надъ шестью конденсаторами различныхъ діаметровъ вполнѣ подтвердили справедливость вывода.

Изъ формулы $\frac{Rr}{R-r}$ можно сдѣлать еще одно важное заключеніе: если R безконечно, или покрайней мѣрѣ очень большое въ сравненіи съ r, тогда зарядъ внутренняго шара долженъ быть пропорціоналенъ его радіусу. Когда шаръ находится по срединѣ пространства большой комнаты, тогда можно предположить, что внѣшній шаръ имѣетъ безконечно большой радіусъ. Гогенъ дѣйствительно нашелъ, что зарядъ шара пропорціоналенъ его радіусу.

К. Чеховичъ.

2. *Сообщенія, сдѣланныя послѣднему собранію британскихъ ученыхъ въ Манчестерѣ.*

— Пр. *Прайсъ* извѣстилъ, что ему удалось разрѣшить трудную механическую задачу опредѣленія въ конечныхъ выраженіяхъ кривой, описываемой при различныхъ условіяхъ движущимся тѣломъ, подверженнымъ вліянію вращенія земли около оси. Въ случаѣ свободнаго паденія тѣла формула даетъ одно отклоненіе къ востоку и другое весьма малое къ югу, согласно съ опытомъ. Для случая полета ядра, направленнаго въ произвольномъ азимутѣ, таже формула позволяетъ вычислить и направленіе пути и величину отклоненія.

— Де ля Рю представилъ новые, блестящіе опыты своихъ фотографическихъ работъ въ примѣненіи оныхъ къ астрономіи, а именно изображенія солнечныхъ пятенъ въ столь большихъ размѣрахъ, что онѣ позволяютъ изученіе физическаго устройства солнечной фотосферы. Равно замѣчательны и фотографіи звѣздныхъ группъ, какъ напр. Плеядъ, обѣщающія дать современемъ возможность составленія этимъ путемъ самыхъ точныхъ картъ звѣзднаго неба.

3. *Нѣкоторыя изъ задачъ, предложенныхъ Гарлемскимъ обществомъ наукъ на конкурсъ къ 1-му Янв. 1863 года.*

Изъ наблюденій покрытій Плеядъ, произведенныхъ въ періодъ послѣдняго обращенія лунныхъ узловъ, опредѣлить съ возможною точностію ошибки лунныхъ таблицъ Г. Гансена — Изслѣдовать теоретически и опытомъ законы, опредѣляющіе длину и напряженіе искръ, получаемыхъ въ приборахъ Румкорфа, различнаго устройства и размѣровъ —Изложить наиболѣе замѣчательныя слѣдствія, какія бы можно было извлечь изъ наблюденія явленій электрическихъ возмущеній въ атмосферѣ, производящихъ токи въ телеграфическихъ проволокахъ.—Обыкновенная премія, назначаемая за удовлетворительное рѣшеніе одного изъ вопросовъ, состоитъ въ золотой медали, достоинства 150 флориновъ и такого же денежнаго вознагражденія.

4. Съѣздъ нѣмецкихъ Астрономовъ въ Дрезднѣ въ Августѣ 1861 года.

Необходимое для полезнаго успѣха занятій отдѣльныхъ обсерваторій раздѣленіе труда и соглашеніе какъ относительно выбора предметовъ изслѣдованія, такъ и методъ обработки и сообщенія результатовъ оныхъ, вызвало уже въ 1857 г., во время общаго съѣзда нѣмецкихъ естество-испытателей въ Боннѣ, мысль объ отдѣльныхъ съѣздахъ астрономовъ. Первое такое собраніе происходило въ Сентябрѣ 1860 г. въ Берлинѣ, второе—въ Дрезденѣ 20 и 21 Августа настоящаго года. Результаты послѣдняго совѣщанія, имѣющіе неоспоримую важность для науки, публикованы въ особомъ отчетѣ, (Bericht über die astronomische Zusammenkunft in Drezden am 20 und 21 Aug. 1861), изъ котораго мы заимствуемъ здѣсь главныя положенія, съ цѣлію, можетъ быть, побудить тѣмъ и нѣкоторыя изъ нашихъ обсерваторій къ принятію участія въ согласной разработкѣ предмета съ нашими заграничными сотрудниками.—Взаимное поощреніе къ ученому труду, знакомство съ направленіемъ работъ каждаго изъ астрономовъ, критическое разсмотрѣніе общихъ пунктовъ воззрѣнія на различныя отрасли астрономической дѣятельности и, преимущественно, общее содѣйствіе въ исполненіи большихъ и важныхъ работъ, которыя по природѣ своей допускаютъ полезное раздѣленіе труда, составляли главные пункты, которые дрезденское собраніе имѣло постоянно въ виду и коими положило руководствоваться на будущее время.

Изъ изустныхъ и письменныхъ сообщеній, сдѣланныхъ собранію, заслуживаютъ особеннаго упоминанія слѣдующія: Г. Повальки представилъ работу, имѣющую цѣлію ввести болѣе однообразія и точности въ вычисленія планетныхъ и кометныхъ орбитъ. Немаловажнымъ источникомъ ошибокъ въ теоретической обработкѣ наблюденій до сихъ поръ было неточное знаніе движенія земли. Съ появленіемъ солнечныхъ таблицъ Гансена Олуфсена и Леверье, основанныхъ на болѣе строгой теоріи, явилась и потребность знать какія поправки должны быть присоединяемы къ прежнимъ даннымъ астрономическихъ календарей для надлежащей обработки старыхъ наблюденій. Эту работу для времени отъ 1815 до 1862 года исполнилъ Г. Повальки. При этомъ было замѣчено, что, не смотря на весьма удовлетворительное согласіе представляемое новѣйшими наблюденіями солнца съ таблицами Г. Гансена, всетаки представляется весьма желательнымъ абсолютное изслѣдованіе нѣкоторыхъ вопросовъ солнечнаго движенія. Въ настоящее время мы имѣемъ для наклонности эклиптики различныя числа Бесселя, Гансена, Петерса и Леверье, которыя различаются другъ отъ друга какъ въ постоянныхъ величинахъ, такъ и въ вѣко-

выхъ измѣненіяхъ, Теоретическая же величина послѣдняго, зависимая преимущественно отъ массы Венеры, еще чувствительнѣе отличается отъ выводимой изъ наблюденій. Поэтому разборъ новыхъ и точныхъ сольстиціальныхъ наблюденій солнца представляется весьма желательнымъ. Другой близкій къ изданію трудъ, о которомъ собраніе получило извѣстіе, принадлежитъ Г. Тиціену и содержится въ табличномъ указателѣ, или росписи всѣхъ данныхъ относительно наблюденій и вычисленій планетъ Прiэтомъ было заявлено также о продолженіи какъ этого указателя, такъ и кометной росписи Энке, присоединенной къ сочиненію Ольберса.

Слѣдующимъ затѣмъ главнымъ пунктомъ разсужденій служили правильныя наблюденія и ежегодныя, предварительныя вычисленія малыхъ планетъ. Собраніе признало вполнѣ достаточнымъ, если только немногія обсерватор и спеціально посвятятъ себя этому предмету, какъ напр. до сихъ поръ дѣлала Берлинская Обсерваторія, ибо неразборчивое накопленіе матеріала, сопряженное съ напрасною потерею времени и труда, представляло до сихъ поръ скорѣе помѣху, чѣмъ пособіе въ надлежащей разработкѣ предмета. При этомъ желательно однако, чтобы первыя появленія планетъ были преслѣдуемы на нѣсколькихъ большихъ обсерваторіяхъ, съ цѣлію обезпечить успѣхъ отъ случайностей погоды. Затѣмъ, при всѣхъ слѣдующихъ появленіяхъ достаточно имѣть три или четыре хорошія наблюденія около времени противостоянія. Что касается редукціи и публикаціи наблюденій, то въ этомъ отношеніи положено руководствоваться примѣромъ, даннымъ Г. Ауверсъ въ Astr Nachr. № 1300. Относительно правильнаго вычисленія планетныхъ орбитъ, которое, при надлежащемъ раздѣленіи, представляетъ для вычислителей трудъ самъ по себѣ поощрительный и весьма способный привлекать новыя дѣятельныя силы, положено способствовать легчайшему ознакомленію съ этимъ предметомъ, посредствомъ изданія подробнаго примѣра всѣхъ относящихся сюда вычисленій и теоритическихъ изслѣдованій. При этомъ было замѣчено еще, что нѣтъ надобности вводить въ вычисленія, уже при второмъ появленіи планетъ, поправки отъ пертурбацій. Для предотвращенія же возможности двойныхъ и даже тройныхъ вычисленій для одной и той же планеты, Г. Фёрстеръ вызвался вести подробный реестръ, въ который будетъ вносится всякое сообщеніе о предпринятомъ вычисленіи и который будетъ служить справкою для всѣхъ желающихъ работать на этомъ полѣ. Наконецъ въ обозначеніи малыхъ планетъ принято употреблять № по порядку времени открытія и за онымъ собственное названіе планеты. Согласно тому, для новооткрытой Г. Лютеромъ планеты принято было обозначеніе (71) Ніоба. Наконецъ высказано было желаніе, дабы чрезвычайно богатый матеріалъ относительно теоріи возмущеній, содержащійся въ работахъ Г Гансена, сдѣлать болѣе доступнымъ при посредствѣ систематическаго обзора всѣхъ появившихся на этомъ полѣ трудовъ и собранія въ одно компактное цѣлое всего относящагося сюда математическаго матеріала. Одинъ изъ присутствующихъ заявилъ, что ему извѣстно существованіе такой работы, приготовляемой уже къ изданію.

Самою важною задачею, относящеюся къ вычисленію кометъ, собраніе признало возможно полное и согласное исполненіе вычисленій координатъ всѣхъ возмущающихъ планетъ, начиная съ 1770 г. до настоящаго времени и далѣе. Этотъ большой трудъ долженъ обнимать собою все, что сдѣлано до сихъ поръ съ этомъ отношеніи. Работа Проф. Моллера, относительно кометы Фэ, представитъ начало этого труда, ибо употребленные имъ при вычисленіяхъ координаты, которыя примыкаютъ къ эпохамъ, установленнымъ уже въ 1857 г. въ Бонѣ, будутъ имъ вскорѣ публикованы. Собраніе не скрывало приэтомъ отъ себя трудностей, какія представляетъ основательное приведеніе этого труда въ исполненіе. Одно уже вычисленіе мѣстъ Юпитера, если послѣдніе должны служить для всѣхъ періодическихъ кометъ, потребовало бы пересмотра теоріи и вычисленія возмущеній высшаго порядка.—Проф. Брунсъ принялъ на себя трудъ руководить распредѣленіемъ работъ между желающими принять въ оныхъ участіе. Вмѣстѣ съ симъ положено представить первые результаты этой работы къ Августу будущаго 1863 года, когда собраніе назначило будущій съѣздъ, и мѣстомъ онаго избрало Гейдельбергъ. На профессора Шонфельда въ Мангеймѣ возложенъ трудъ разбора и приготовленія къ сообщенію всѣхъ мнѣній, проэктовъ и ученыхъ извѣстій, какіе могутъ быть доставлены ему предварительно, съ цѣлію подвергнуть ихъ обсужденію на Гейдельбергскомъ съѣздѣ. Ему же предоставлено озаботиться въ свое время публикацiею и разсылкою циркуляровъ къ астрономамъ всѣхъ образованныхъ странъ съ приглашеніемъ принять участіе въ собраніи, въ числѣ главныхъ задачъ котораго будетъ, вѣроятно, болѣе систематическое распредѣленіе дѣятельности обсерваторій, посвящающихъ себя изслѣдованіямъ неподвижныхъ звѣздъ. *Г.*

5. *Краткія извѣстія.*

— *Дюмонсель* доказалъ опытами, что двѣ пластинки одного и того же металла, но различныхъ размѣровъ, погруженныя въ воду, даютъ гальваническій токъ въ направленіи отъ большой пластинки къ малой. Фактъ этотъ онъ объясняетъ разностію въ окисленіи неравныхъ поверхностей. Это заключеніе подтверждается и другимъ опытомъ съ совершенно одинаковыми пластинками, которыя даютъ токъ, какъ скоро онѣ погружаются въ воду не въ одно время, а одна изъ нихъ прежде другой: токъ существуетъ нѣкоторое время, пока не сравняется степень окисленія обѣихъ пластинокъ. Такимъ образомъ по заключенію Дюмонселя причина такъ наз. земныхъ токовъ, существующихъ въ телеграфическихъ проволокахъ, можетъ быть тройкая: 1-е различіе влажности почвы, въ которой погружены пластинки. 2. различная способность къ окисленію поверхностей той и другой пластинки и 3 различная величина поверхностей оныхъ; но во всѣхъ 3-хъ случаяхъ пластинка, подверженная наибольшему окисленію и менѣе поляризуемая представляетъ элементъ электро-отрицательный. Преобладаніе той или другой причины опредѣляетъ направленіе и силу земнаго тока.

— *Гассіо* (Cosmos, 4 octobre 1861) посредствомъ особеннаго прибора, въ которомъ можно было разрѣдить воздухъ и пропустить электрическую искру отъ прибора Румкорфа, получилъ осажденіе металловъ въ видѣ

порошка на отрицательномъ полюсѣ, послѣ болѣе или менѣе продолжительнаго дѣйствія искры. Нѣкоторыя изъ металловъ, каковы золото, серебро, платина, висмутъ, послѣ 24 часоваго дѣйствія дали осадокъ въ видѣ очень нѣжнаго порошка; послѣ же болѣе продолжительнаго дѣйствія оказались слѣды кристаллизаціи. Гораздо труднѣе получить осадокъ желѣза и магнія; осадокъ глинія не былъ замѣтенъ и послѣ 48 часоваго дѣйствія.

— *Ридорфъ* доказалъ опытами, что примѣсь какой либо соли къ водѣ понижаетъ точку замерзанія, и возвышаетъ точку кипѣнія. Пониженіе точки замерзанія пропорціонально количеству примѣшанной соли; но приэтомъ, безводныя и водныя соли, дѣйствуютъ различно, даже нѣкоторыя изъ солей понижаютъ точку замерзанія, до опредѣленной температуры, какъ безводныя, а при низшей температурѣ какъ водныя. Отсюда слѣдуетъ, что опыты надъ пониженіемъ точки замерзанія могутъ служить средствомъ къ распознаванію, принадлежитъ ли соль къ безводнымъ, или воднымъ.

— *Мейерштейнъ* устроилъ очень чувствительный гальванометръ, который можетъ съ пользою служить и для электричества статическаго Устройство это основано на уменьшеніи вліянія земнаго магнетизма; для чего надъ извѣстнымъ гальванометромъ Вебера поставляется магнитъ, котораго полюсъ, противуположный земному, обращенъ къ стрѣлкѣ. Такъ какъ тангенсъ угла отклоненія стрѣлки пропорціоналенъ силѣ гальваническаго тока, раздѣленной на напряженіе земнаго магнетизма; слѣдовательно, уменьшая послѣднее, получаемъ большую величину для тангенса отклоненія. Такой гальванометръ дастъ значительное отклоненіе, если къ концу проволоки мультипликатора прикасаться стеклянною палочкой, слегка потертой шелкомъ.

— *Дове*, употребляя призму изъ Аррагонита, вмѣсто призмы Николя, нашелъ, что она представляетъ нѣкоторое преимущество передъ послѣднею: по причинѣ большаго поля зрѣнія, большей ясности изображенія, и наконецъ потому, что въ аррагонитѣ легко отыскать оптическую ось.

— Онъ же употребилъ микроскопъ какъ фотометръ. Для сего онъ кладетъ на столикъ микроскопа фотографическій, микроскопическій рисунокъ, на который направленъ свѣтъ отъ двухъ сравниваемыхъ источниковъ; снизу и сверху. Дове говоритъ, что это средство точнѣе всѣхъ прочихъ доселѣ употребляемыхъ фотометрическихъ способовъ.

— *Пфаффъ* доказалъ опытомъ, что приводимое во всѣхъ физическихъ руководствахъ положеніе на счетъ угла совершенной поляризаціи свѣта, невѣрно; а именно, нельзя безъусловно говорить, что свѣтъ поляризуется вполнѣ, когда лучи его падаютъ на стеклянную пластинку подъ угломъ 35° 24′, и что тогда, какъ отраженные такъ и проходящіе лучи показываютъ *maximum* поляризаціи. Онъ нашелъ, что одна пластинка поляризуетъ свѣтъ также сильно, какъ и семь пластинокъ, когда на первую изъ нихъ падаютъ лучи подъ угломъ въ 6°, а на послѣднія въ 35° 24′. Вообще, поляризація преломленнаго луча увеличивается съ уменьшеніемъ угла паденія и съ увеличеніемъ числа паръ пластинокъ, причемъ и уголъ поляризаціи увеличивается.

— *Пальміери*, Директоръ Везувіанской Обсерв. доказалъ опытомъ, что пары какой либо жидкости, заключенной въ платиновой чашечкѣ и нагрѣваемой сверху солнечными лучами, при посредствѣ собирательнаго стекла, представляютъ всегда слѣды положительнаго электричества; тогда какъ сама жидкость электризуется отрицательно.

— Парижской Академіи представлены были въ засѣданіи 21 Октяб. 2 пластинки стекла, имѣющія въ толщину 4½ и 6 сентиметр. въ которыхъ находились сквозныя отверстія, произведенныя искрою прибора Румкорфа и представляющія большую аналогію съ слѣдами молніи. Каналъ, оставленный искрою, чрезвычайно тонкій, бѣлый и непрозрачный съ свѣтлыми мѣстами, расположенными спирально, раздѣляется на нѣсколько вѣтвей внутри массы стекла. Незамѣтно впрочемъ ни плавленія массы, ни металлическаго осадка на стѣнкахъ каналовъ; сопровождающія явленія удостовѣряютъ что при прохожденіи искры происходитъ сильное давленіе на матерію.

— Г. *Фибигъ* старается доказать опытомъ, вопреки утвержденіямъ нѣкоторыхъ другихъ физиковъ и между прочимъ Бекереля, что фосфоресценція въ тѣлахъ не можетъ быть слѣдствіемъ только одного нагрѣванія, а необходимо требуетъ, чтобы тѣло предварительно было подвержено дѣйствію лучей свѣта. Сѣрнистый стронцій есть одно изъ наиболѣе фосфоресцирующихъ тѣлъ, которое свѣтитъ въ темнотѣ нѣкоторое время прекраснымъ свѣтло-зеленымъ свѣтомъ. Будучи охлаждено и снова нагрѣто въ темнотѣ, оно не обнаруживаетъ ни малѣйшаго свѣта; между тѣмъ, будучи выставлено на дневной свѣтъ въ теченіи короткаго времени, оно снова дѣлалось свѣтящимъ. Подобные опыты произведены были и съ другими тѣлами съ равнымъ успѣхомъ. Но самымъ сильнымъ доводомъ въ пользу мнѣнія Фибиг'а служитъ теоретическій законъ, допускаемый всѣми физиками, а именно, что наибольшая преломляемость свѣта, лучащаго изъ какого либо тѣла, никогда не можетъ быть болѣе самой меньшей преломляемости лучей, коими освѣщалось это тѣло. Этотъ законъ уже для многихъ случаевъ доказанъ и для теплородныхъ лучей; поэтому, если свѣтъ и теплоту почитать проявленіями одного и тогоже дѣятеля; то было бы противорѣчіемъ, если бы теплородные лучи, имѣющіе меньшую преломляемость чѣмъ свѣтовые, могли сообщить какому либо тѣлу способносъ свѣченія въ темнотѣ, т. е. испусканіе лучей большей преломляемости.

Печатать позволяется, Вильно 5 Декабря 1861 года. *Ценсоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.*

ВИЛЬНО Типографія А Марциновскаго. Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*